

Leçon 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotent.

[Bec] : *Objectif agrégation*, Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré

[Cal-Per] : *Carnet de voyage en Algèbre*, Phillipe Caldero, Marie Peronnier

[Gri] : *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone

[Man-Mne] : *Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné

[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi

[Sch] : *Analyse numérique : une approche mathématique*, Michelle Schatzman

[Szp] : *Mathématiques Algèbre L3*, Aviva Szpirglas

I Partie A - Trigonalisabilité

I.1 Qui sont-ils et comment les trouver ? [Rom][Man-Mne]

■ **Déf 1 (Endomorphisme trigonalisable) :**

■ **Déf 2 (Matrices trigonalisable) :**

■ **Ex 3 :** Voir [Rom].

■ **Thm 4 (Critère par polynôme annulateur) :**

■ **Ex 5 :** Matrice trigonalisable et non-diagonalisable.

■ **Ex 6 (Cas des corps algébriquements clos) :**

■ **Prop 7 (Endomorphisme induit trigonalisable) :**

Rem 8 : Formules sur la trace, le déterminant.

I.2 Propriétés topologiques [Cal-Per]

■ **Prop 9 (Adhérence dans $\mathbb{R}$) :**

■ **Contre-Ex 10 :**

■ **Prop 11 (Densité des matrices à n valeurs propres dans $\mathbb{C}$) :**

I.3 Application à la détermination (théorique) de valeurs propres [Man-Mne]

■ **Prop 12 (Polynôme caractéristique de $P(A)$) :**

■ **Ex 13 (Groupe fini de matrices) :**

■ **Thm 14 (Version série entière) :**

■ **Ex 15 (Exponentielle) :**

Rem 16 : Motivation racines.

I.4 Trigonalisation simultanée [Man-Mne][Rom]

■ **Thm 17 (Trigonalisation simultanée) :**

■ **Contre-Ex 18 :**

App 19 (Trigonalisabilité de la somme, du produit) :

II Partie B - Nilpotent

II.1 Propriétés structure [Bec] [Rom]

■ **Déf 20 (Endomorphisme nilpotent) :**

■ **Déf 21 (Indice de nilpotence) :**

■ **Ex 22 (Bloc de Jordan) :**

■ **Ex 23 (Dérivation de polynômes, dérivation discrète) :**

■ **Thm 24 (Structure des nilpotents) :**

■ **Contre-Ex 25 :**

■ **Contre-Ex 26 :**

■ **Prop 27 (Somme de nilpotents, produit) :**

■ **Contre-Ex 28 :**

II.2 Comment savoir si c'est nilpotent ?

■ **Thm 29 (Caractérisations par le spectre) :**

■ **Thm 30 (Caractérisation par la trace) :**

II.3 Décompositions [Cal-Per] [Rom][Szp][Gri] [Sch]

■ **Prop 31 (Lemme de Fitting) :**

 Dév 32 (Décomposition de Fitting) :

 Dév 33 (Cardinal du cône nilpotent) :

Thm 34 (Décomposition de Dunford) :

Ex 35 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Ex 36 : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Prop 37 (Décomposition de Dunford de l'exponentielle) :

App 38 : A est diagonalisable ssi e^A l'est.

Contre-Ex 39 :

App 40 (Rayon spectral) :

II.4 Exponentielle et nilpotent [Rom]

Prop 41 (Exponentielle d'un nilpotent) :

Déf 42 (Logarithme d'un nilpotent) :

Thm 43 (Fonctions réciproques) :

III Partie C - Jordan [Bec] [Man-Mne]

Prop 44 (Nilpotent et bloc de Jordan) :

 Dév 45 (Jordan pour les nilpotent) :

Thm 46 (Noyaux itérés) :

App 47 (Classes de conjugaisons) :

 Dév 48 (Jordan général) :